$$\int_L F(x,y)(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)$$

与积分路线无关,可微函数 $F(x,y)$ 应满足怎样的条件?

---

8. 计算曲线积分

$$\int_{AMB} [\varphi(y)\mathrm{e}^x - my]\,\mathrm{d}x + [\varphi'(y)\mathrm{e}^x - m]\mathrm{d}y,$$

其中 $\varphi(y)$ 和 $\varphi'(y)$ 为连续函数,AMB 为连接点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 的任何路线,但与直线段 AB 围成已知大小为 S 的面积.

9. 设函数 $f(u)$ 具有一阶连续导数,证明对任何光滑封闭曲线 L,有

$$\oint_L f(xy)(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) = 0.$$

10. 设函数 $u(x,y)$ 在由封闭的光滑曲线 L 所围的区域 D 上具有二阶连续偏导数,证明

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\sigma = \oint_L \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s,$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 是 $u(x,y)$ 沿 L 外法线方向 n 的方向导数.

§4 二重积分的变量变换

一 二重积分的变量变换公式

在定积分的计算中,我们得到了如下结论:设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,$x=\varphi(t)$ 当 t 从 α 变到 β 时,严格单调地从 a 变到 b,且 $\varphi(t)$ 连续可导,则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

当 $\alpha<\beta$ (即 $\varphi'(t)>0$) 时,记 $X=[a,b]$,$Y=[\alpha,\beta]$,则 $X=\varphi(Y)$,$Y=\varphi^{-1}(X)$. 利用这些记号,公式(1)又可写成

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(X)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

当 $\alpha>\beta$ (即 $\varphi'(t)<0$) 时,(1)式可写成

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\varphi^{-1}(X)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

故当 $\varphi(t)$ 为严格单调且连续可微时,(2)式和(3)式可统一写成如下的形式:

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(X)} f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

下面我们把公式(4)推广到二重积分的场合. 为此,先给出下面的引理.

引理 设变换 $T: x=x(u,v)$,$y=y(u,v)$ 将 uv 平面上由按段光滑封闭曲线所围的闭区域 Δ 一对一地映成 xy 平面上的闭区域 D,函数 $x(u,v)$,$y(u,v)$ 在 Δ 内

分别具有一阶连续偏导数且它们的函数行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0,\quad (u,v)\in\Delta,$$

则区域 D 的面积

$$\mu(D)=\iint_{\Delta}|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{5}$$

证　下面给出当 $y(u,v)$ 在 Δ 内具有二阶连续偏导数时的证明. 对 $y(u,v)$ 具有一阶连续偏导数条件下的证明在本章 §9 中给出.

由于 T 是一对一变换, 且 $J(u,v)\neq 0$, 因而 T 把 Δ 的内点变为 D 的内点, 所以 Δ 的按段光滑边界曲线 L_Δ 变换到 D 时, 其边界曲线 L_D 也是按段光滑的.

设曲线 L_Δ 的参数方程为

$$u=u(t),\quad v=v(t)\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta).$$

由于 L_Δ 按段光滑, 所以 $u'(t), v'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上至多除去有限个第一类间断点外, 在其他的点上都连续. 因为 $L_D=T(L_\Delta)$, 所以 L_D 的参数方程为

$$\begin{aligned}x&=x(t)=x(u(t),v(t)),\\ y&=y(t)=y(u(t),v(t))\end{aligned}\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta).$$

若规定 t 从 α 变到 β 时, 对应于 L_D 的正向, 则根据格林公式, 取 $P(x,y)=0$, $Q(x,y)=x$, 有

$$\begin{aligned}\mu(D)&=\oint_{L_D}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta x(t)y'(t)\mathrm{d}t\\&=\int_\alpha^\beta x(u(t),v(t))\left[\frac{\partial y}{\partial u}u'(t)+\frac{\partial y}{\partial v}v'(t)\right]\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{6}$$

另一方面, 在 uv 平面上

$$\begin{aligned}&\oint_{L_\Delta}x(u,v)\left[\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\right]\\&=\pm\int_\alpha^\beta x(u(t),v(t))\left[\frac{\partial y}{\partial u}u'(t)+\frac{\partial y}{\partial v}v'(t)\right]\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{7}$$

其中正号及负号分别由 t 从 α 变到 β 时, 是对应于 L_Δ 的正方向或负方向所决定. 由(6)及(7)式得到

$$\begin{aligned}\mu(D)&=\pm\oint_{L_\Delta}x(u,v)\left[\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\right]\\&=\pm\oint_{L_\Delta}x(u,v)\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u+x(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

令 $P(u,v)=x(u,v)\dfrac{\partial y}{\partial u}$, $Q(u,v)=x(u,v)\dfrac{\partial y}{\partial v}$, 在 uv 平面上对上式应用格林公式,

得到

$$\mu(D)=\pm\iint\limits_{\Delta}\left(\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

由于函数 $y(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，即有 $\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 y}{\partial v\partial u}$，因此，$\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}=J(u,v)$，于是

$$\mu(D)=\pm\iint\limits_{\Delta}J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

又因为 $\mu(D)$ 总是非负的，而 $J(u,v)$ 在 Δ 上不为零且连续，故其函数值在 Δ 上不变号，所以

$$\mu(D)=\iint\limits_{\Delta}|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$ □

定理 21.13 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积，变换 $T:x=x(u,v),y=y(u,v)$ 将 uv 平面由按段光滑封闭曲线所围成的闭区域 Δ 一对一地映成 xy 平面上的闭区域 D，函数 $x(u,v),y(u,v)$ 在 Δ 内分别具有一阶连续偏导数且它们的函数行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0,\quad (u,v)\in\Delta,$$

则

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Delta}f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

证 用曲线网把 Δ 分成 n 个小区域 Δ_i，在变换 T 作用下，区域 D 也相应地被分成 n 个小区域 D_i. 记 Δ_i 及 D_i 的面积为 $\mu(\Delta_i)$ 及 $\mu(D_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 由引理及二重积分中值定理，有

$$\mu(D_i)=\iint\limits_{\Delta_i}|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=|J(\bar{u}_i,\bar{v}_i)|\mu(\Delta_i),$$

其中 $(\bar{u}_i,\bar{v}_i)\in\Delta_i(i=1,2,\cdots,n)$.

令 $\xi_i=x(\bar{u}_i,\bar{v}_i),\eta_i=y(\bar{u}_i,\bar{v}_i)$，则 $(\xi_i,\eta_i)\in D_i(i=1,2,\cdots,n)$. 作二重积分 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的积分和

$$\begin{aligned}\sigma&=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\mu(D_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}f(x(\bar{u}_i,\bar{v}_i),y(\bar{u}_i,\bar{v}_i))|J(\bar{u}_i,\bar{v}_i)|\mu(\Delta_i).\end{aligned}$$

上式右边的和式是 Δ 上可积函数 $f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|$ 的积分和. 又由变换 T 的连续性可知，当区域 Δ 的分割 $T_\Delta:\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$ 的细度 $\|T_\Delta\|\to 0$ 时，

区域 D 相应的分割 $T_D:\{D_1,D_2,\cdots,D_n\}$ 的细度 $\|T_D\|$ 也趋于零. 因此得到

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_\Delta f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \qquad \square$$

例1 求 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x=0,y=0,x+y=1$ 所围区域(图 21-20).

解 为了简化被积函数，令 $u=x-y,v=x+y$. 为此作变换 $T:x=\frac{1}{2}(u+v)$，$y=\frac{1}{2}(v-u)$，则

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}>0.$$

在变换 T 的作用下，区域 D 的原象 Δ 如图 21-21 所示. 所以

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_\Delta \mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 v(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{4}. \qquad \square$$

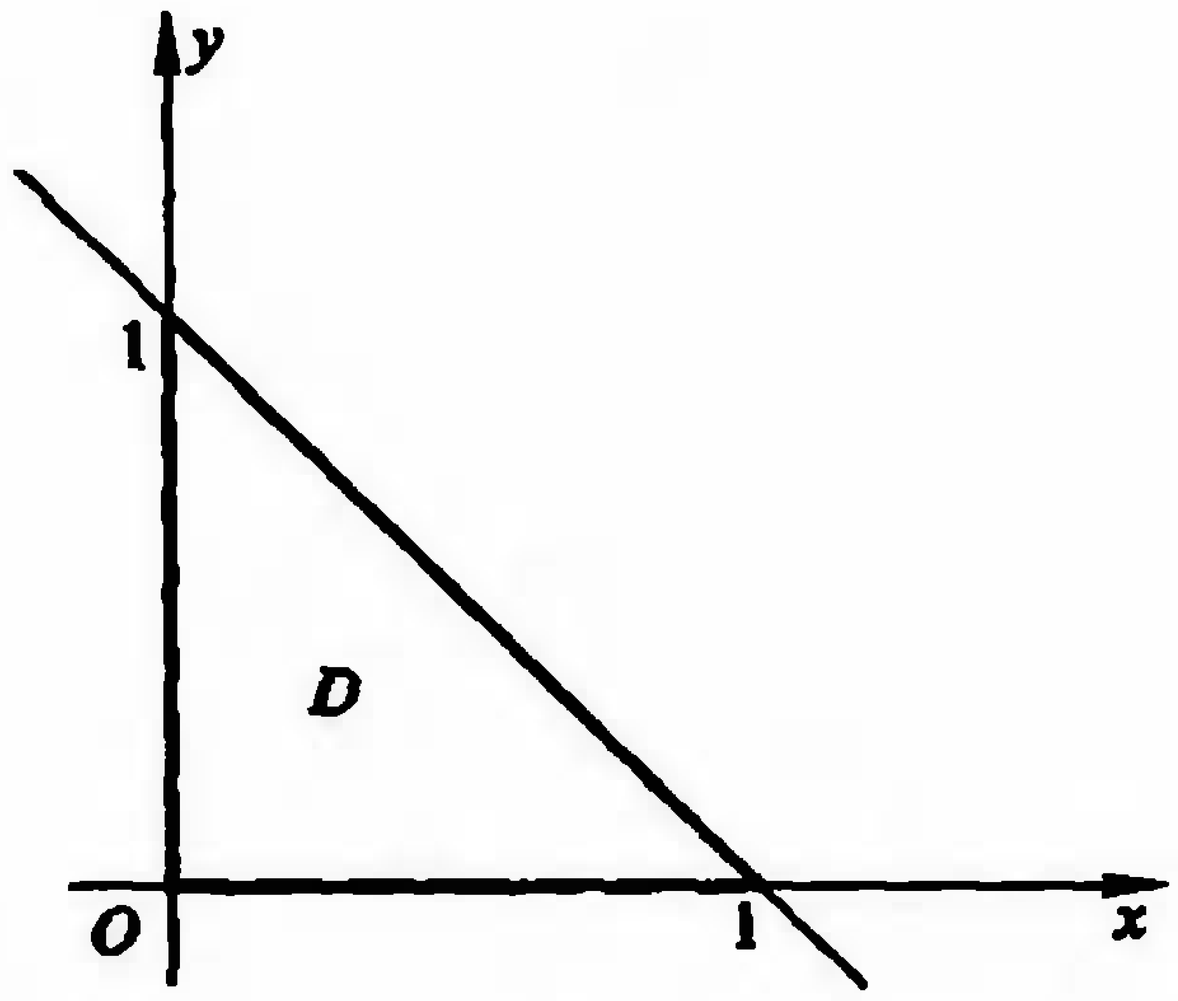


图 21-20

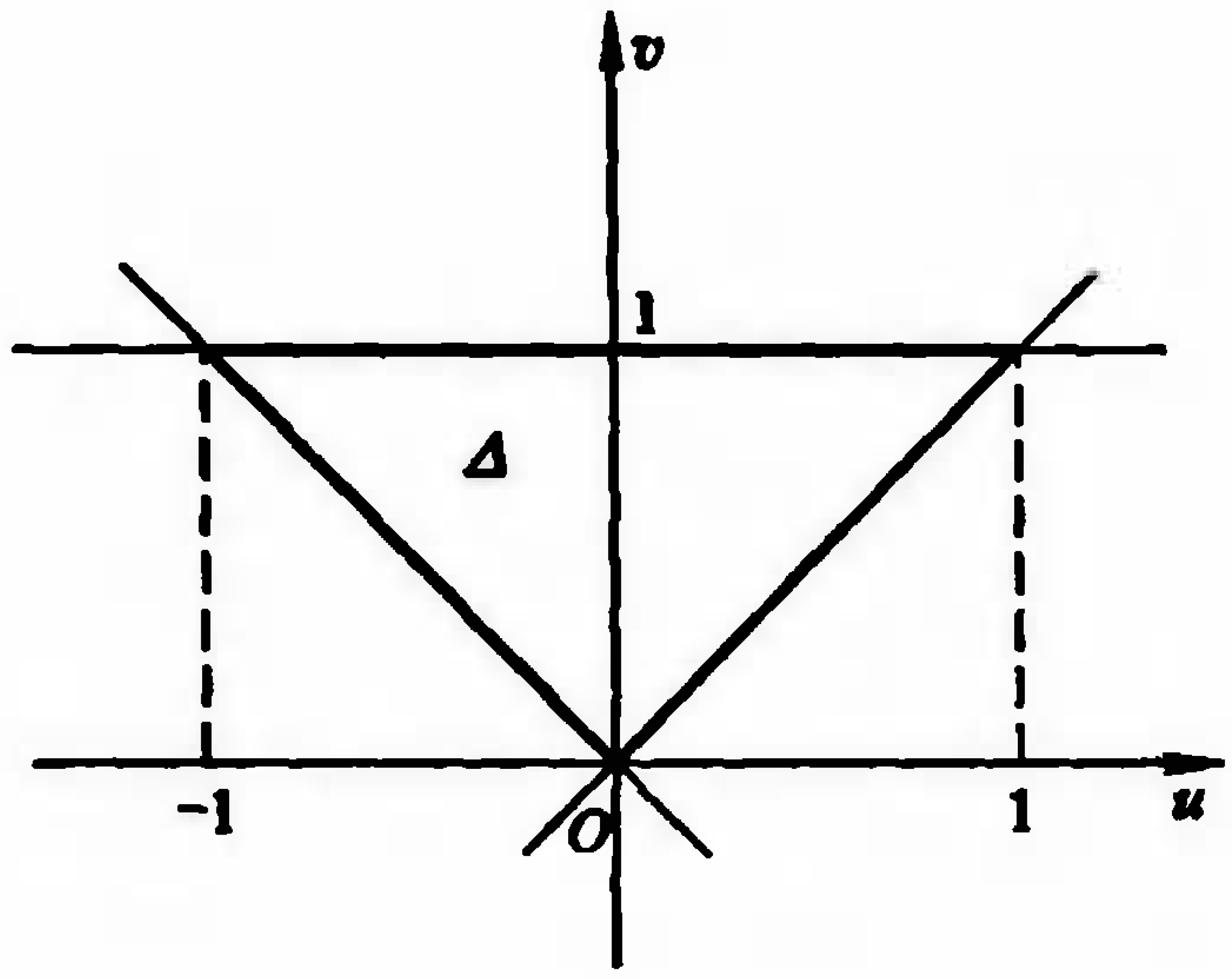


图 21-21

例2 求抛物线 $y^2=mx,y^2=nx$ 和直线 $y=\alpha x,y=\beta x$ 所围区域 D 的面积 $\mu(D)$ $(0<m<n,0<\alpha<\beta)$.

解 D 的面积

$$\mu(D)=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

为了简化积分区域，作变换

$$x=\frac{u}{v^2},\quad y=\frac{u}{v}.$$

它把 xy 平面上的区域 D（图 21-22 中的阴影部分）对应到 uv 平面上的矩形区域 $\Delta=[m,n]\times[\alpha,\beta]$. 由于

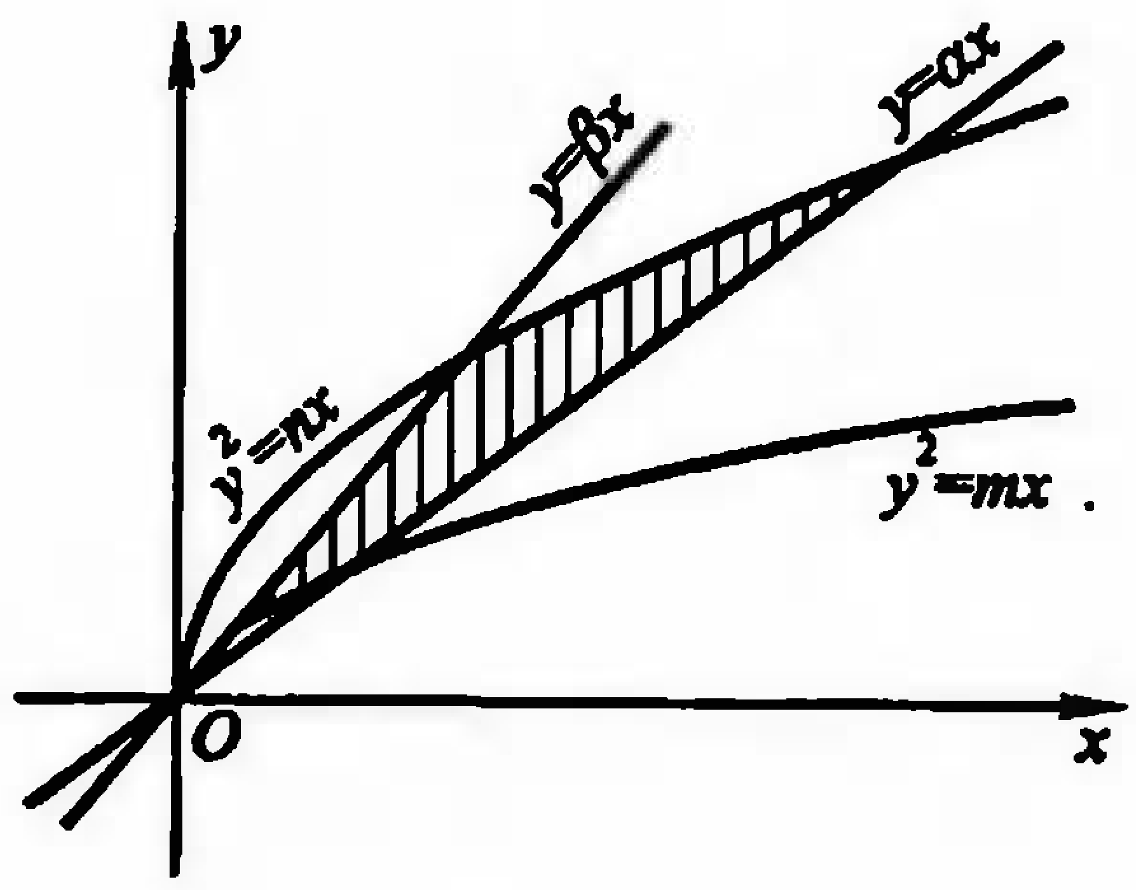


图 21-22

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{v^2} & -\dfrac{2u}{v^3}\\ \dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2}\end{vmatrix}=\frac{u}{v^4}>0,\quad (u,v)\in\Delta,$$

所以

$$\mu(D)=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\iint\limits_\Delta \frac{u}{v^4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}v}{v^4}\cdot\int_m^n u\mathrm{d}u=\frac{(n^2-m^2)(\beta^3-\alpha^3)}{6\alpha^3\beta^3}.\qquad\square$$

二 用极坐标计算二重积分

当积分区域是圆域或圆域的一部分，或者被积函数的形式为 $f(x^2+y^2)$ 时，采用极坐标变换

$$T:\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}\quad 0\leqslant r<+\infty,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \tag{8}$$

往往能达到简化积分区域或被积函数的目的. 此时，变换 T 的函数行列式为

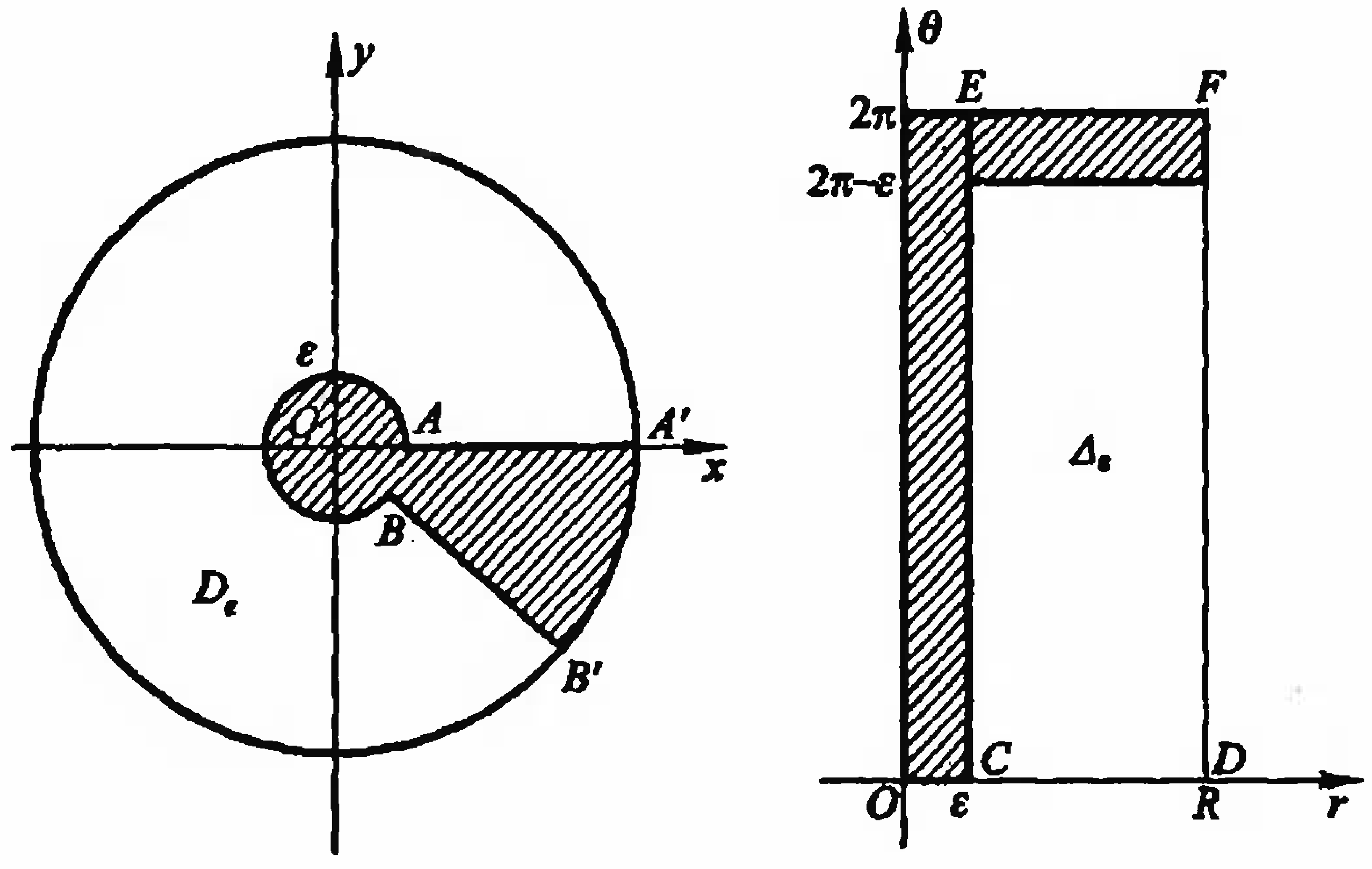
$$J(r,\theta)=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r.$$

容易知道，极坐标变换 T 把 $r\theta$ 平面上的矩形 $[0,R]\times[0,2\pi]$ 变换成 xy 平面上的圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$. 但对应不是一对一的. 例如，$xy$ 平面上原点 $O(0,0)$ 与 $r\theta$ 平面上直线 $r=0$ 相对应，x 轴上线段 AA' 对应于 $r\theta$ 平面上两条线段 CD 和 EF（图 21-23）. 又当 $r=0$ 时，$J(r,\theta)=0$，因此不满足定理 21.13 的条件. 但是，我们仍然有下面的结论.

定理 21.14 设 $f(x,y)$ 满足定理 21.13 的条件，且在极坐标变换(8)下，xy 平面上有界闭区域 D 与 $r\theta$ 平面上区域 Δ 对应，则成立：

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_\Delta f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta. \tag{9}$$

证 若 D 为圆域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$，则 Δ 为 $r\theta$ 平面上矩形区域 $[0,R]\times[0,2\pi]$. 设 D_ε 为在圆环 $\{(x,y)\mid 0<\varepsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2\}$ 中除去中心角为 ε 的扇形



(a) (b)

图 21-23

$BB'A'A$所得的区域(图 21-23(a)),则在变换(8)下,D_ε 对应于 $r\theta$ 平面上的矩形区域 $\Delta_\varepsilon=[\varepsilon,R]\times[0,2\pi-\varepsilon]$ (图 21-23(b)). 但极坐标变换(8)在 D_ε 与 Δ_ε 之间是一对一变换,且在 Δ_ε 上函数行列式 $J(r,\theta)>0$. 于是由定理 21.13,有

$$\iint_{D_\varepsilon} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Delta_\varepsilon} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

因为$f(x,y)$在有界闭域 D 上有界,在上式中令 $\varepsilon\to 0$,即得

$$\iint_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Delta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

若 D 是一般的有界闭区域,则取足够大的 $R>0$,使 D 包含在圆域 $D_R=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$ 内,并且在 D_R 上定义函数

$$F(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

函数 $F(x,y)$ 在 D_R 内至多在有限条按段光滑曲线上间断,因此,对函数 $F(x,y)$,由前述有

$$\iint_{D_R} F(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Delta_R} F(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

其中 Δ_R 为 $r\theta$ 平面上矩形区域$[0,R]\times[0,2\pi]$. 由函数 $F(x,y)$ 的定义,即得(9)式. □

由定理 21.14 看到,用极坐标变换计算二重积分,除变量作相应的替换外,还须把“面积微元”$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 换成 $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.